

Espinosa Valdés, M., Jiménez Rasgado, G., Alfonso Martin, J. & Ortiz Morales, I. (2025). Cálculo de volumen de un sólido de revolución: Desde la geometría hasta la impresión 3D. En Jiménez Arteaga, G., Jiménez Martínez, K. & Betanzos Valenzuela, O. (Coords.), *Transformación digital: Un enfoque multidisciplinario desde la ingeniería, la administración y la educación* (pp. 229-255). Editorial Sinergy.

Capítulo 10

Cálculo de volumen de un sólido de revolución: Desde la geometría hasta la impresión 3D

Calculating the volume of a solid of revolution: From geometry to 3D impression

María Elisa Espinosa Valdés

Tecnológico Nacional de México - Instituto Tecnológico de Minatitlán

 0000-0002-3460-9995 | maria.ev@minatitlan.tecnm.mx

Guillermina Jiménez Rasgado

Tecnológico Nacional de México - Instituto Tecnológico de Minatitlán

 0000-0003-0163-0525 | guillermina.jr@minatitlan.tecnm.mx

Julio Antonio Alfonso Martin

Tecnológico Nacional de México - Instituto Tecnológico de Minatitlán

 0009-0004-0139-0386 | L24230537@minatitlan.tecnm.mx

Isaac Otilio Ortiz Morales

Tecnológico Nacional de México - Instituto Tecnológico de Minatitlán

 0009-0007-0709-0431 | L24230217@minatitlan.tecnm.mx

Resumen

La enseñanza del cálculo integral en los primeros semestres de ingeniería representa un reto, pues los estudiantes suelen percibirlo como abstracto y poco vinculado con la realidad. Con el fin de superar esta dificultad, el presente trabajo tuvo como objetivo diseñar y aplicar una estrategia didáctica innovadora que integrara conceptos geométricos, cálculo integral y el uso de herramientas digitales para favorecer la comprensión del cálculo de volúmenes mediante sólidos de revolución. Se empleó un enfoque cualitativo de carácter exploratorio a través del desarrollo

de tres casos de estudio en el aula, en los que los estudiantes trabajaron con modelos físicos a escala, software de visualización matemática y prototipado en 3D. Los resultados mostraron que la propuesta fortaleció la comprensión de los conceptos matemáticos, facilitó la validación de cálculos y promovió un aprendizaje más significativo al vincular teoría y práctica. En conclusión, la experiencia demostró que la integración de recursos manipulativos, digitales y experimentales contribuye al desarrollo del pensamiento crítico, visual y espacial, así como de competencias clave para la formación integral de futuros ingenieros.

Palabras clave: Aprendizaje significativo, Cálculo integral, GeoGebra, Geometría, impresión en 3D, modelación matemática.

Abstract

Teaching integral calculus in the early semesters of engineering programs represents a challenge, as students often perceive it as abstract and disconnected from real-world applications. To address this issue, the aim of this study was to design and implement an innovative didactic strategy that integrates geometric concepts, integral calculus, and digital tools to facilitate the understanding of volume calculation through solids of revolution. A qualitative and exploratory approach was applied through three classroom case studies in which students worked with scaled physical models, mathematical visualization software, and 3D prototyping. The results showed that the strategy strengthened students' conceptual understanding, supported the validation of calculations, and fostered more meaningful learning by linking theory and practice. In conclusion, the experience demonstrated that the integration of manipulative, digital, and experimental resources contributes to the development of critical, visual, and spatial thinking, as well as key competencies for the comprehensive training of future engineers.

Key Words: 3D printing, GeoGebra, Geometry, Integral calculus, Mathematical modeling, Meaningful learning.

Introducción

La enseñanza del cálculo integral representa uno de los mayores desafíos en los primeros semestres de las carreras de ingeniería. A menudo, los estudiantes enfrentan dificultades al comprender conceptos abstractos y procedimientos matemáticos que carecen, en apariencia, de una conexión directa con la realidad (Godino y Batanero, 1994; Freudenthal, 1991). Esta situación plantea la necesidad de explorar enfoques didácticos que integren teoría, práctica y tecnología para fomentar un aprendizaje más significativo y duradero (Santos-Trigo, 2007).

En este contexto, el presente trabajo surge como una estrategia innovadora que combina el modelado geométrico, el uso del cálculo integral y las herramientas digitales, para facilitar la comprensión del cálculo de volúmenes mediante sólidos de revolución. A través de una experiencia práctica en el aula, tres estudiantes enfrentan desafíos que los llevan a aplicar conocimientos matemáticos en problemas contextualizados, apoyándose en recursos como figuras físicas en escala, el software GeoGebra y la impresión 3D.

La aplicación de GeoGebra como recurso interactivo en la enseñanza de geometría sólida ha demostrado mejorar el rendimiento académico y la visualización espacial de los estudiantes, al tiempo que fomenta el aprendizaje basado en problemas contextualizados (Chinyere, Akpan, Charles-Ogan, & James, 2023). Este proceso no solo fortalece su dominio conceptual, sino que también estimula habilidades clave en la formación de ingenieros, tales como el pensamiento crítico, visual y espacial, así como la resolución de problemas y el uso de tecnologías emergentes (Del Río, 2020; Ortega et al., 2024; Tall, 1991).

El cálculo del volumen de sólidos de revolución, desarrollado mediante el método de los discos (Larson, 2015), se trabaja desde una perspectiva geométrica y analítica, promoviendo así una conexión profunda entre las representaciones visuales y simbólicas del conocimiento matemático. Esta propuesta didáctica se dirige tanto a docentes como a estudiantes de cálculo integral (programa ACF – 0902), que cursan una carrera de ingeniería en el Tecnológico Nacional de México (TecNM), con el objetivo de aportar herramientas pedagógicas que contribuyan a una enseñanza más activa, aplicada y centrada en el desarrollo de competencias esenciales en la ingeniería contemporánea.

Este procedimiento conecta el razonamiento geométrico con la representación analítica, permitiendo que los estudiantes comprendan de manera más profunda las relaciones entre las representaciones visuales y simbólicas de los conceptos matemáticos (Larson & Edwards, 2016).

Finalmente, según Freudenthal (1991), el estudiante desarrolla una mayor competencia en la resolución de problemas cuando, desde una edad temprana, es capaz de transitar con facilidad entre distintas representaciones. Además, la elección de una representación puede surgir de manera natural, influida por factores como las preferencias personales, el estilo de pensamiento del resolutor o el intento de superar las dificultades que se presentan al utilizar otra representación. En este sentido, Duval (2006) sostiene que la comprensión matemática depende en gran medida de la capacidad para coordinar distintos registros de representación semiótica, lo cual fortalece la flexibilidad cognitiva del estudiante y mejora su desempeño en la resolución de problemas complejos.

Exposición del caso

En primer lugar, asignamos un código único a cada uno de los estudiantes y profesores.

- Estudiante del primer caso: **E1**
- Estudiante del Segundo caso: **E2**
- Estudiante del tercer caso: **E3**
- El primer profesor: **P1**
- El segundo profesor:

De la actividad a realizar

A los estudiantes se les proporciona una figura geométrica que representa, a escala, un tanque de almacenamiento. En el desarrollo de esta actividad se consideran diferentes cuerpos geométricos tridimensionales como se muestra en la figura 1. Cada estudiante elige uno de los tanques a escala:

Figura 1.

Recipientes para la elección



Cada estudiante deberá resolver y demostrar analíticamente los siguientes apartados:

- Identificación del sólido geométrico:
Especificar qué tipo de sólido fue seleccionado (por ejemplo, cilindro, cono, esfera, etc.) y justificar brevemente su elección en función de su aplicabilidad como tanque de almacenamiento.

- Cálculo del volumen mediante fórmulas geométricas:
Determinar el volumen del sólido utilizando las expresiones clásicas de la geometría euclidiana (Salazar et al., 2020).
- Cálculo del volumen mediante el método de discos:
Se solicita determinar el volumen de un sólido de revolución empleando el método de discos (Larson, 2015). Para ello, el estudiante deberá:
 - Identificar y representar gráficamente una región en el plano, acotada por una función $f(x)$ o $f(y)$, según la orientación, que será definida por el propio estudiante. Esta región deberá estar construida de forma tal que, al ser rotada respecto a un eje (ya sea horizontal o vertical), genere un sólido tridimensional.
 - Aplicar el método de discos para calcular el volumen del sólido generado por dicha revolución. El estudiante deberá realizar el desarrollo completo del procedimiento, incluyendo:
 - La función que define la región generadora.
 - El intervalo de integración correspondiente.
 - La expresión del volumen como una integral definida.
 - El cálculo analítico del volumen.
 - Representar al menos tres configuraciones distintas del mismo sólido o de sólidos relacionados, variando:
 - La orientación del eje de rotación (por ejemplo, rotación respecto al eje x , al eje y , o a líneas paralelas a estos).
 - El modo de describir la región generadora (por ejemplo, expresando la función como $x = g(y)$ en lugar de $y = f(x)$).

El objetivo de este ejercicio es que el estudiante comprenda la flexibilidad del método de discos y su aplicación en distintas representaciones geométricas, fortaleciendo la visualización espacial y el dominio del cálculo integral aplicado a sólidos de revolución. Además, con este ejercicio demuestran los estudiantes las competencias adquiridas al cursar la asignatura de Cálculo Integral.

- Verificación computacional mediante software especializado:
Validar los cálculos anteriores utilizando GeoGebra que es un software matemático de visualización y cálculo. Se debe graficar el sólido generado y comparar los resultados numéricos obtenidos con las soluciones analíticas.
- Validación experimental mediante prototipado en 3D:
Utilizando el modelo tridimensional exportado en formato STL generado en GeoGebra, se imprimirá el tanque mediante tecnología de impresión 3D.

Posteriormente, se realizará una validación práctica del volumen llenando el recipiente con un líquido y comparando con el volumen teórico.

A continuación, presentamos los diferentes casos.

Caso 1 (E1)

El primer estudiante eligió el recipiente a escala que se muestra en la figura2.

Figura 2.

Recipiente elegido por E1



E1: Lo primero que manifiesta es que no cuenta con información específica sobre dicho tanque, pero menciona que tiene forma cilíndrica, similar a los tanques de almacenamiento que ha observado en refinerías y otras industrias de la zona.

P1: El profesor le pregunta qué información necesita para resolver su problema.

E1: El estudiante revisa la información disponible y propone utilizar la fórmula del volumen de un cilindro:

Nueva Escuela Mexicana Digital (2023)

$$V = \pi r^2 h$$

Donde:

V: Volumen [cm³]

r: Radio [cm]

h: Altura [cm]

Esta fórmula la pretende usar para responder la pregunta 2; sin embargo, no dispone de los valores necesarios.

P1: Le pregunta cómo podría obtener esos datos. El estudiante tarda unos minutos en responder, ya que se muestra algo desconcertado.

E1: Finalmente responde: "Siempre me dan los datos..."

P1: El profesor insiste: "¿Cómo podrías obtenerlos tú?"

E1: El estudiante responde con inseguridad: "*Tal vez midiendo...*"

E1: El estudiante dice que tal vez midiendo (no se le ve muy seguro)

P1: El profesor le reafirma que es correcto, que puede medir el modelo, y le informa que hay material disponible para todos, el cual se presenta en la figura 3:

Figura 3.

Material disponible para todos los casos



E1: El estudiante se ayuda de una regla para realizar las mediciones obteniendo

$$r = 3 \text{ cm} \quad \text{y} \quad h = 6 \text{ cm}$$

con estos datos, se calcula el volumen utilizando geometría básica:

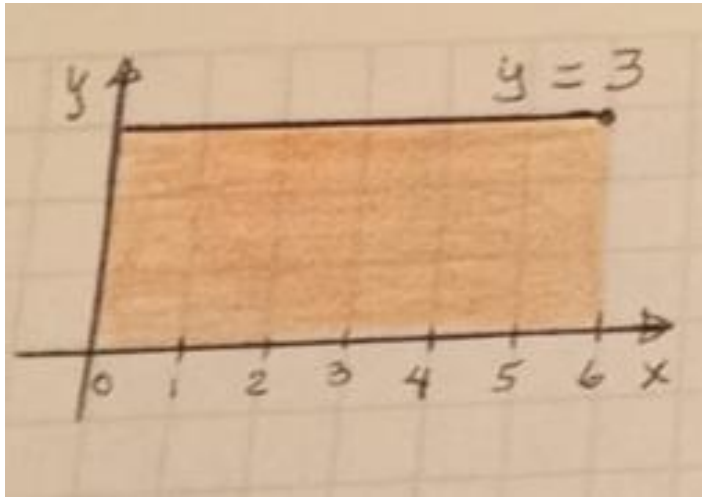
$$V = \pi r^2 h = \pi (3)^2 6 = 169.64 \text{ cm}^3$$

Cálculo del volumen utilizando el método de discos (Larson, 2006, pp. 456–457)

E1: Dice que tomara la figura 4 como generadora del volumen:

Figura 4.

Área generadora del volumen



Dado que no se dispone de una función explícita de la curva generadora que gira alrededor del eje (x) para formar el sólido de revolución, se observa que el contorno del cilindro puede interpretarse como un caso particular de la ecuación de la recta, ya que es una función constante:

$$y = 3$$

Esto corresponde a un cilindro generado por la rotación de una recta horizontal alrededor del eje x, en el intervalo $0 \leq x \leq 6$. Por tanto, la fórmula para calcular el volumen es:

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx \quad \text{Larson (2006, pp. 456-457)}$$

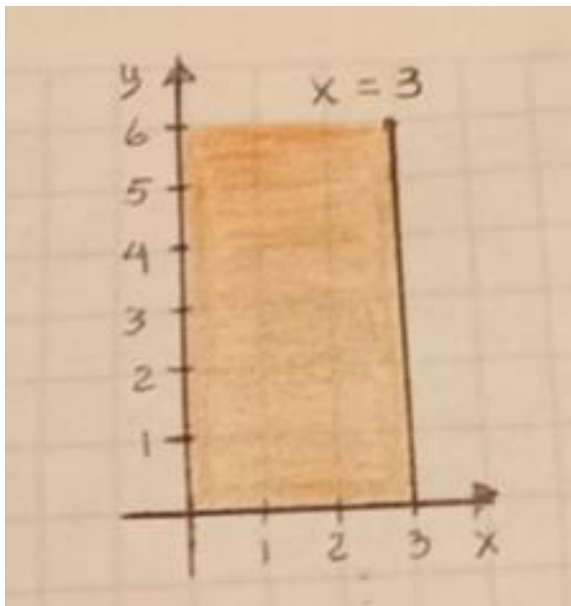
Sustituyendo con los valores correspondientes:

$$= \pi \int_0^6 [3]^2 dx = \pi \int_0^6 9 dx = \pi (9)(6) = 169.64 \text{ cm}^3$$

E1: Indica que utilizará la figura 5 como base para la generación del volumen:

Figura 5.

Área generadora del volumen



Dado que no se dispone de una función que represente la curva generadora que gira alrededor del eje (y) para formar el sólido de revolución, se observa que el contorno del cilindro puede interpretarse como un caso particular de una función constante:

$$x = 3$$

Esto corresponde a un cilindro generado por la rotación de una recta vertical alrededor del eje y, en el intervalo $0 \leq y \leq 6$. Por tanto, la fórmula para calcular el volumen es:

$$V = \pi \int_a^b [R(y)]^2 dy \quad \text{Larson (2006, pp. 456-457)}$$

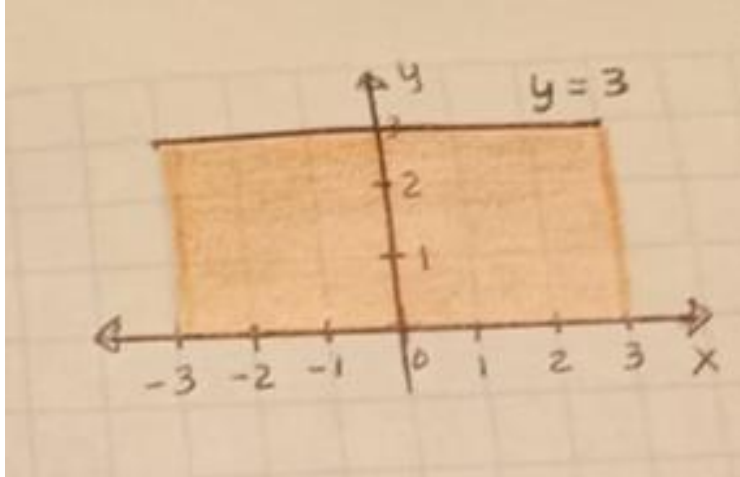
Sustituyendo con los valores correspondientes:

$$= \pi \int_0^6 [3]^2 dy = \pi \int_0^6 9 dy = \pi (9)(6) = 169.64 \text{ cm}^3$$

E1: Afirma que la figura 6 funcionará como elemento generador del volumen en el desarrollo del modelo

Figura 6.

Área generadora del volumen



Al no disponer de una función explícita para la curva generadora que rota en torno al eje x , el contorno del cilindro se interpreta como una función constante igual a:

$$y = 3$$

Esto corresponde a un cilindro generado por la rotación de una recta horizontal alrededor del eje x , en el intervalo $-3 \leq x \leq 3$. Por tanto, la fórmula para calcular el volumen es:

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx \quad \text{Larson (2006, pp. 456-457)}$$

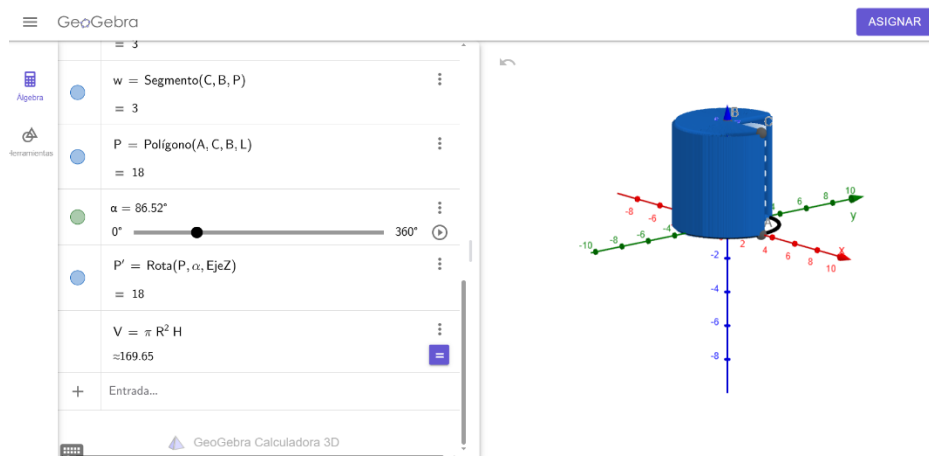
Sustituyendo con los valores correspondientes:

$$V = \pi \int_{-3}^3 [3]^2 dx = \pi \int_{-3}^3 9 dx = \pi (9)(3) - \pi (9)(-3) = 169.64 \text{ cm}^3$$

Una vez obtenidas las soluciones analíticas, los estudiantes utilizan GeoGebra para representar visualmente los sólidos generados y así contrastar el valor del volumen dado en GeoGebra con sus resultados obtenidos en las construcciones geométricas e integrales correspondientes (Del Río, 2020; Ortega et al., 2024). Esta herramienta también se aprovecha para crear archivos STL, con los cuales es posible imprimir modelos físicos en 3D que refuerzan la comprensión espacial. A continuación, se presentan el volumen calculado por GeoGebra figura 7, así como la representación visual del tanque a escala que proporciona GeoGebra.

Figura 7.

Comprobación con GeoGebra



Después de haber hecho la impresión en 3D utilizando el archivo STL de GeoGebra, finalmente, los estudiantes llevan a cabo la validación práctica del volumen teórico, llenando el recipiente impreso en 3D con líquido y transfiriéndolo a una probeta graduada. De este modo, verifican experimentalmente el volumen previamente calculado mediante métodos geométricos, integrales definidas y la herramienta GeoGebra. A continuación, ver figura 8, se presenta la imagen de la impresión 3D y el momento de la verificación por parte del estudiante.

Figura 8.

Medición del volumen



Caso 2 (E2)

El segundo estudiante eligió el siguiente tanque a escala, ver figura 9:

Figura 9.

Recipiente elegido por E2



E2: El segundo estudiante selecciona tanque a escala con el que trabajara. En su declaración inicial, menciona que no cuenta con especificaciones del tanque, pero menciona que tiene forma de pirámide con base circular, similar a los tanques de almacenamiento que ha observado en una industria cervecera que visito y en una industria donde daban tratamiento de aguas residuales.

P1: El profesor le pregunta qué información necesita para resolver su problema.

E2: El estudiante dice recordar la formula del volumen de un cono:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \text{Nueva Escuela Mexicana Digital (2024)}$$

Donde:

V: Volumen [cm³]

r: Radio [cm]

h: Altura [cm]

Se observa que intenta utilizar esta fórmula para resolver la pregunta 2; no obstante, menciona que no dispone de los valores pertinentes para su aplicación.

P1: Le pregunta cómo podría obtener esos datos.

E2: Dice: “Nunca me había pasado esto, que solamente me den una figura geométrica que representa un tanque a escala...”, seguido de una expresión de confusión: “No sé qué hacer”

E2: El estudiante concluye que, en experiencias anteriores, siempre se le han proporcionado los datos. Frente a la insistencia del profesor, responde: “Tal vez usted me los puede dar o midiendo...”, aunque agrega que no está seguro de cómo hacerlo o con qué herramientas.

P1: El profesor reitera, al igual que con otros estudiantes, que pueden hacer uso del material disponible en el aula para medir o calcular los datos necesarios.

E2: Mediciones realizadas $r = 3 \text{ cm}$ y $h = 6 \text{ cm}$ con estos datos, se calcula el volumen utilizando geometría básica:

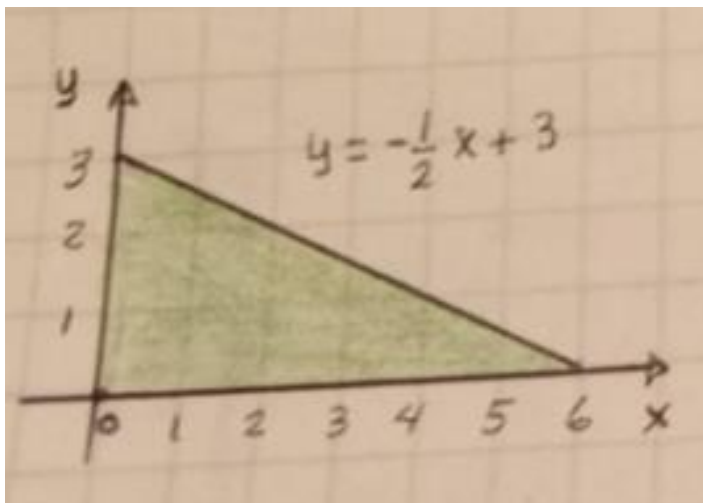
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(3)^2(6) = 56.54 \text{ cm}^3$$

Cálculo del volumen utilizando el método de discos (Larson, 2006, pp. 456 – 457)

E2: Indica que la figura 10 será empleada como generadora del volumen:

Figura 10.

Área generadora del volumen



Para calcular la ecuación de la curva que delimita la región que va a girar para formar el sólido de revolución el estudiante dice que solamente cuenta con los puntos $(0, 3)$ y $(6, 0)$ con esto:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 3}{6 - 0} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

La ecuación es:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 0) \quad \therefore \quad y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Como no contamos con una ecuación explícita de la curva generadora que rota alrededor del eje x para formar el sólido, se interpreta que el contorno del cono corresponde a la siguiente función:

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Esto corresponde a un cono generado por la rotación de una recta alrededor del eje x, en el intervalo $0 \leq x \leq 6$. Por tanto, la fórmula para calcular el volumen es:

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx \quad \text{Larson (2006, pp. 456-457)}$$

Sustituyendo con los valores correspondientes:

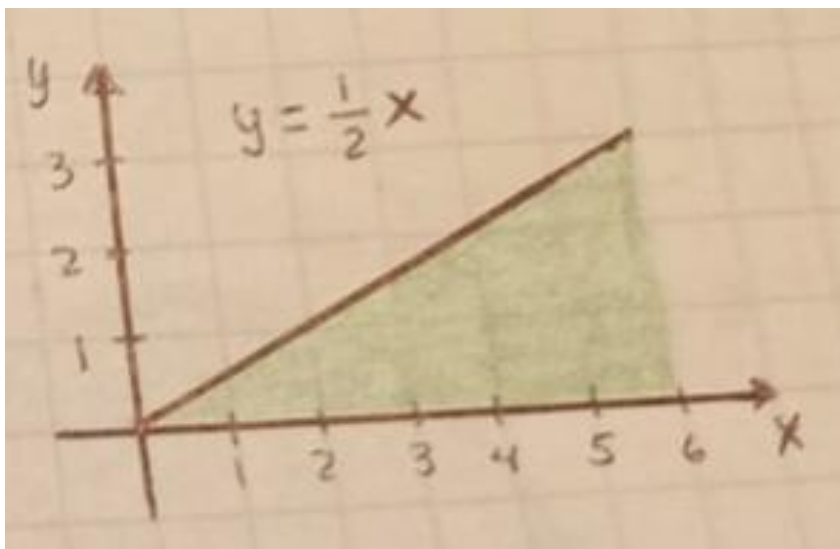
$$V = \pi \int_0^6 \left[-\frac{1}{2}x + 3\right]^2 dx = \pi \int_0^6 \frac{1}{4}x^2 dx - 3\pi \int_0^6 x dx + 9\pi \int_0^6 dx$$

$$V = \frac{1}{4}\pi \frac{6^3}{3} - 3\pi \frac{6^2}{2} + 9\pi (6) = 56.54 \text{ cm}^3$$

E2: Señala que la figura 11 será utilizada como referencia para el sólido de revolución:

Figura 11.

Área generadora del volumen



Para calcular la ecuación de la curva que delimita la región que va a girar para formar el sólido de revolución el estudiante dice que solamente cuenta con los puntos (0, 0) y (6, 3) con esto:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{6 - 0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

La ecuación es:

$$y - 0 = \frac{1}{2} (x - 0) \quad \therefore \quad y = \frac{1}{2}x$$

En ausencia de una ecuación explícita que describa la curva generadora que rota alrededor del eje x para formar el sólido de revolución, se puede considerar que la recta que el contorno del cono.

$$y = \frac{1}{2}x$$

Esto corresponde a un cono generado por la rotación de una recta alrededor del eje x, en el intervalo $0 \leq y \leq 6$. Por tanto, la fórmula para calcular el volumen es:

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx \quad \text{Larson (2006, pp. 456-457)}$$

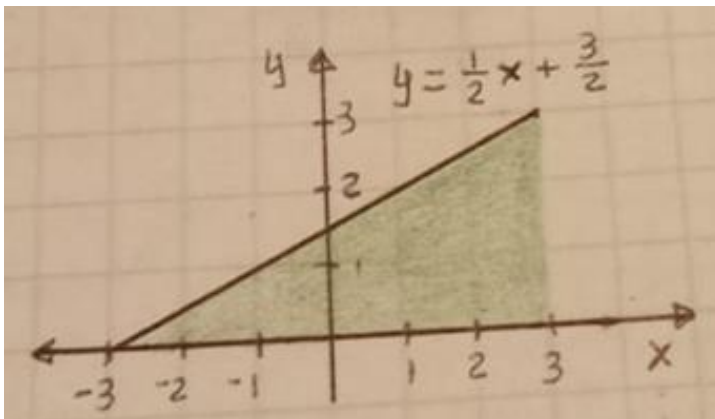
Sustituyendo con los valores correspondientes:

$$V = \pi \int_0^6 \left[\frac{1}{2}x\right]^2 dx = \pi \int_0^6 \frac{1}{4}x^2 dx = \pi \left(\frac{1}{4}\right) \frac{(6)^3}{3} = 56.54 \text{ cm}^3$$

E2: Establece que la figura 12 servirá como base para la generación del volumen tridimensional:

Figura 12.

Área generadora del volumen



Para calcular la función de la curva que delimita la región que va a girar para formar el sólido de revolución el estudiante dice que solamente cuenta con los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 3)$ con esto:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{3 + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

La ecuación es:

$$y - 3 = \frac{1}{2} (x - 3) \quad \therefore \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Esto corresponde a un cono generado por la rotación de una recta alrededor del eje x , en el intervalo $-3 \leq x \leq 3$. Por tanto, la fórmula para calcular el volumen es:

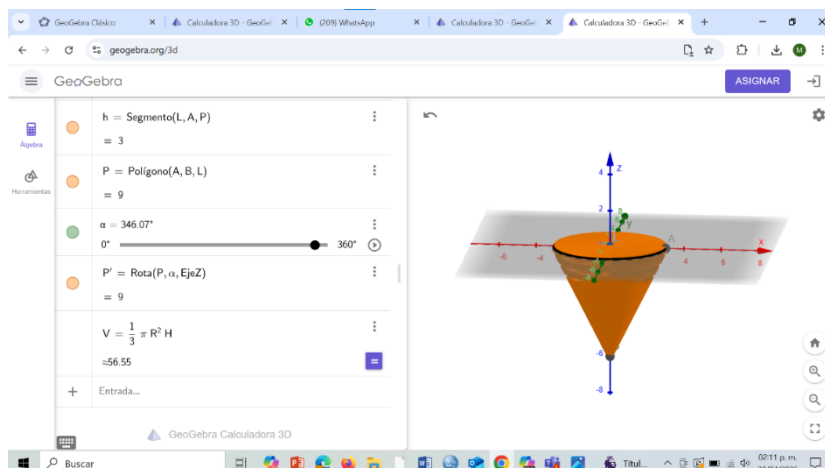
$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx \quad \text{Larson (2006, pp. 456-457)}$$

Sustituyendo con los valores correspondientes:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-3}^3 \left[\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right]^2 dx = \pi \int_{-3}^3 \frac{1}{4} x^2 dx + \pi \int_{-3}^3 \frac{3}{2} x dx + \pi \int_{-3}^3 \frac{9}{4} dx = \\ &= \frac{1}{4} \pi \int_{-3}^3 x^2 dx + \frac{3}{2} \pi \int_{-3}^3 x dx + \frac{9}{4} \pi \int_{-3}^3 dx = \\ &\frac{1}{4} \pi \frac{3^3}{3} + \frac{3}{2} \pi \frac{3^2}{2} + \frac{9}{4} \pi (3) - \left[\frac{1}{4} \pi \frac{(-3)^3}{3} + \frac{3}{2} \pi \frac{(-3)^2}{2} + \frac{9}{4} \pi (-3) \right] = 56.53 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

A partir de los resultados analíticos obtenidos, los estudiantes emplean GeoGebra como herramienta de validación, ver Figura 13, generando representaciones gráficas del sólido de revolución y comparándolas con sus cálculos geométricos e integrales (Del Río, 2020; Ortega et al., 2024). En este caso el alumno decidió probar con un sólido de revolución para comprobar que le iba a dar el mismo volumen, a pesar de tener una posición diferente a las mostradas anteriormente. Posteriormente, mediante la misma plataforma, elaboran archivos STL que permiten al alumno realizar la impresión tridimensional de los modelos construidos.

Figura 13.



Cono generado con GeoGebra

Como paso final del ejercicio, los estudiantes validan de forma práctica el volumen del sólido. Para ello, llenan con líquido el recipiente previamente impreso en 3D y luego vacían su contenido en una probeta graduada, lo que les permite contrastar el resultado obtenido con los cálculos realizados por métodos geométricos, por integración definida y con el apoyo de GeoGebra. En la figura 14 se observa tanto el modelo impreso como el proceso de comprobación realizado por un estudiante.

Figura 14.

Medición del volumen del cono



Caso 3 (E3)

El tercer estudiante eligió el siguiente tanque a escala (ver figura 15):

Figura 15.

Recipiente elegido por E3



E3: Esto es una esfera, se parece mucho a los tanques de almacenamiento que he visto en la refinería.

P2: Interesante observación. ¿Y cómo crees que podrías calcular el volumen de esa esfera?

E3: Profesor, necesito la fórmula del volumen de una esfera. No la recuerdo.

P2: Puedes buscarla.

E3: La voy a buscar en una de mis libretas o en internet.

P2: Adelante.

(Después de buscarla)

E3: ¡Ya la tengo! La fórmula es:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{Escolares.net (2023)}$$

Donde:

V: Volumen [cm^3]

r: Radio [cm]

h: Altura [cm]

P2: Muy bien. ¿Qué vas a hacer ahora?

E3: Necesito medir el radio de la esfera. Para eso, necesitaría una regla flexible.

P2: No contamos con una regla flexible en este momento. ¿Puedes encontrar el radio de otra manera?

E3: Sí, puedo usar una tira de papel. La enrolló alrededor de la esfera para obtener su perímetro.

P2: Bien, ahora que tienes el perímetro, ¿qué harás? Recuerda que necesitas el radio, no el perímetro.

E3: Me acuerdo de que la fórmula del perímetro de un círculo es:

$$P = \pi d \text{ pero sé que } d = \frac{P}{\pi}, \text{ además el } d = 2r$$

$$\begin{aligned} \text{Por lo que } P = 25 \text{ cm pero sé que } d &= \frac{25 \text{ cm}}{\pi} = 7.9582 \text{ cm}, \text{ además el } d = 2r \therefore r = \frac{d}{2} \\ &= \frac{7.9582}{2} = 3.9782 \approx 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

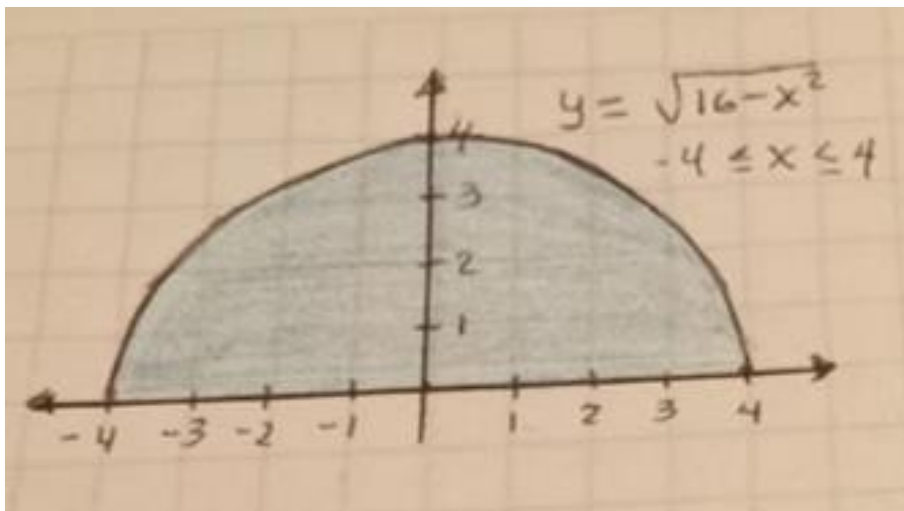
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi 4^3 = \frac{4}{3} \pi 64 = 268.08 \text{ cm}^3$$

Cálculo del volumen utilizando el método de discos (Larson, 2006, pp. 456–457)

E3: Señala que el cálculo será realizado con base en la figura 16

Figura 16.

Área generadora del volumen



Para determinar la ecuación de la curva que delimita la región que se va a rotar para formar un sólido de revolución, el estudiante (E3) menciona que cuenta con la ecuación general de una circunferencia con centro en el origen:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

donde r representa el radio de la circunferencia en centímetros.

E3 recuerda que ya conoce el valor del radio, por lo que afirma que la ecuación de la curva generadora que rota alrededor del eje x () (para generar un volumen) es la siguiente:

$$x^2 + y^2 = 16$$

A partir de esta ecuación implícita, es posible despejar y , obteniendo:

$$y = +\sqrt{16 - x^2}$$

P2: ¿La variable x puede tomar cualquier valor?

E3: No sé... creo que solo enteros.

P2: Observa bien la función.

E3: Creo que solamente en el intervalo $-4 \leq x \leq 4$.

Esta curva corresponde a un semicírculo en el intervalo $-4 \leq x \leq 4$, el cual, al rotar alrededor del eje x , genera una esfera.

La fórmula para calcular el volumen de un sólido de revolución generado por rotación alrededor del eje x es:

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx \quad (\text{Larson, 2006, pp. 456–457})$$

Sustituyendo los valores:

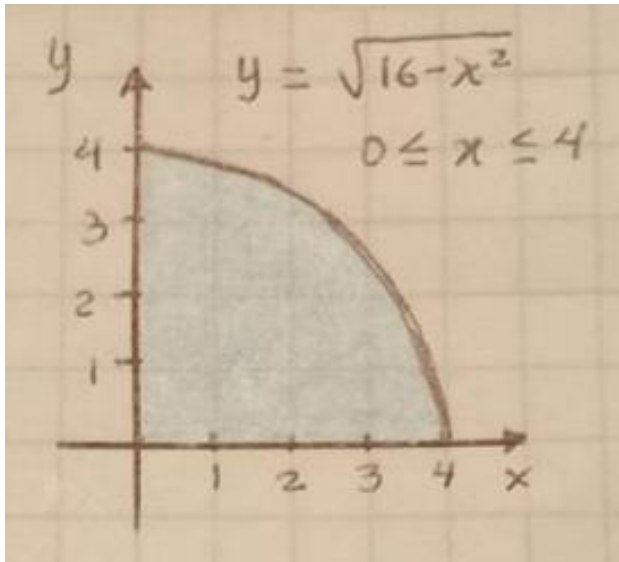
$$V = \pi \int_{-4}^4 [\sqrt{16 - x^2}]^2 dx = 16 \pi \int_{-4}^4 dx - \pi \int_{-4}^4 x^2 dx$$

$$V = 16 \pi (4) - \pi \frac{4^3}{3} - \left[16 \pi (-4) - \pi \frac{(-4)^3}{3} \right] = 268.08 \text{ cm}^3$$

E3: Indica que desarrollará su cálculo tomando como referencia la figura 17:

Figura 17.

Área generadora del volumen



Para determinar la ecuación de la curva que delimita la región que se va a rotar para formar el sólido de revolución (que en este caso corresponde a media esfera), el estudiante (E3) menciona que utilizará la misma ecuación empleada en el cálculo anterior. Sin embargo, aclara que lo único que cambiará será el intervalo de valores de x :

$$y = +\sqrt{16 - x^2}$$

E3: Ahora trabajaré con el intervalo: $0 \leq x \leq 4$

Por tanto, la fórmula para calcular el volumen es:

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx \quad \text{Larson (2006, pp. 456-457)}$$

Dado que con este intervalo solo se genera media esfera, el resultado deberá multiplicarse por 2:

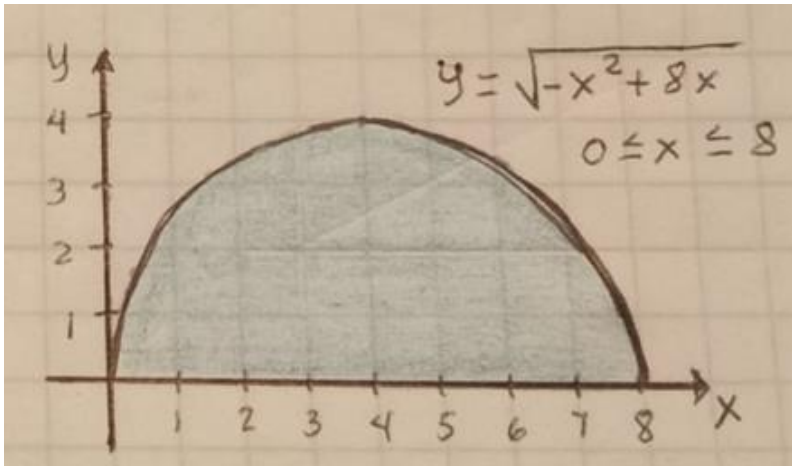
$$V = 2\pi \int_0^4 [\sqrt{16 - x^2}]^2 dx = 32\pi \int_0^4 dx - 2\pi \int_0^4 x^2 dx$$

$$V = 32\pi (4) - 2\pi \frac{4^3}{3} = 268.08 \text{ cm}^3$$

P2: A continuación, se presenta la forma alternativa que propone E3 para hallar el volumen de la esfera ver figura 18:

Figura 18.

Área generadora del volumen



En ausencia de una ecuación explícita que describa la curva generadora que rota alrededor del eje x para formar el sólido de revolución, se puede considerar que dicha curva es parte de una circunferencia con centro en el punto $(4,0)$, de acuerdo con el diagrama elegido.

La ecuación de esta circunferencia es:

$$(x - 4)^2 + (y - 0)^2 = 16$$

Despejando:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 16$$

$$y^2 = 16 - x^2 + 8x - 16$$

$$y = +\sqrt{-x^2 + 8x}$$

E3: Aclara que esta función es válida únicamente en el intervalo:

$$0 \leq x \leq 8$$

P2: ¿Cómo vas a encontrar el volumen para esta nueva propuesta?

E3: Utilizaré la fórmula general para calcular el volumen de un sólido de revolución:

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx \quad \text{Larson (2006, pp. 456-457)}$$

Sustituyendo con los valores correspondientes al problema, tenemos:

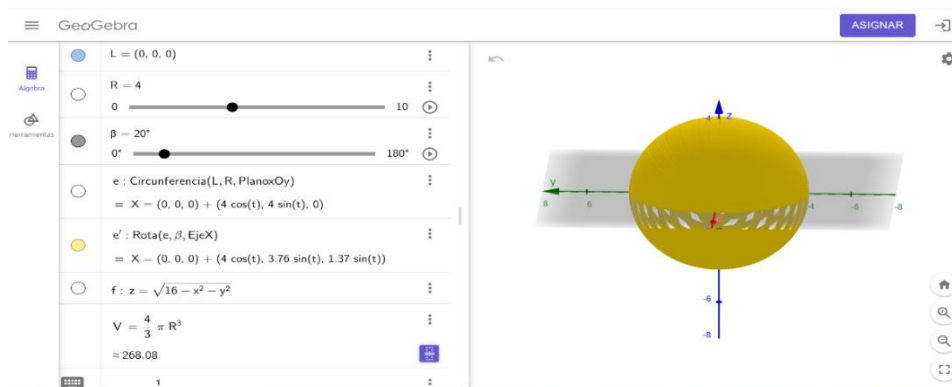
$$V = \pi \int_0^8 [\sqrt{-x^2 + 8x}]^2 dx = -\pi \int_0^8 x^2 dx + 8\pi \int_0^8 x dx$$

$$V = -\pi \left(\frac{8^3}{3} \right) + 8\pi \frac{8^2}{2} = 268.08 \text{ cm}^3$$

Tras resolver los problemas de manera analítica, los estudiantes recurren a GeoGebra Figura 19 para verificar la exactitud de sus cálculos mediante visualizaciones gráficas de los sólidos de revolución (Del Río, 2020; Ortega et al., 2024). Luego, la generación de archivos STL desde esta plataforma les permite llevar sus modelos al entorno físico mediante impresión 3D, integrando así habilidades digitales con el pensamiento geométrico.

Figura 19.

Volumen y esfera generada con GeoGebra



Finalmente, los estudiantes llevan a cabo la validación práctica del volumen teórico, llenando el recipiente impreso en 3D con líquido y transfiriéndolo a una probeta graduada. De este modo, verifican experimentalmente el volumen previamente calculado mediante métodos geométricos, integrales definidas y la herramienta GeoGebra. A continuación, se presenta la imagen de la impresión 3D y el momento de la verificación por parte del estudiante ver figura 20.

Figura 20.

Medición del volumen de la semiesfera.



Discusión

Los resultados obtenidos permiten destacar la importancia de fomentar el aprendizaje activo mediante actividades manipulativas y visuales. El uso de objetos físicos, como modelos a escala, facilitó que los estudiantes exploraran conceptos abstractos del cálculo integral desde una perspectiva concreta, lo que fortaleció la construcción significativa del conocimiento matemático y la vinculación entre teoría y práctica. Esta evidencia confirma que el contacto con representaciones tangibles contribuye a superar la percepción de abstracción que caracteriza a esta asignatura en los primeros semestres de ingeniería.

Asimismo, la integración de herramientas tecnológicas en el aula, particularmente GeoGebra, resultó eficaz para representar gráficamente funciones, visualizar sólidos de revolución y validar resultados analíticos. Esta experiencia demostró que el uso regular de software de visualización matemática facilita la conexión entre representaciones algebraicas, geométricas y numéricas, promoviendo un aprendizaje más integrado y dinámico. Complementariamente, la incorporación de la impresión 3D a partir de archivos STL generados en GeoGebra ofreció a los estudiantes una experiencia multisensorial, consolidando el pensamiento espacial y reforzando la validación práctica de los cálculos.

Otro aspecto relevante fue la necesidad de articular el cálculo integral con otras disciplinas del currículo de ingeniería. Diseñar actividades interdisciplinarias que conecten la matemática con áreas como el diseño asistido por computadora, la física o el dibujo técnico favorece un enfoque más aplicado y contextualizado, lo que incrementa la motivación de los estudiantes y su percepción de utilidad del conocimiento adquirido. Para ello, se identificó también la urgencia de formar continuamente a los docentes en metodologías activas y en el uso de tecnologías educativas, a fin de asegurar una implementación efectiva y actualizada de estrategias innovadoras en el aula.

Finalmente, se reconoce la importancia de evaluar no solo los resultados, sino también los procesos de aprendizaje. Incluir instrumentos que valoren el razonamiento, la creatividad, el uso adecuado de herramientas y la reflexión crítica enriquece la comprensión del avance de los estudiantes más allá de la mera obtención de respuestas correctas. En este sentido, resulta necesario documentar y compartir experiencias exitosas, contribuyendo a la construcción de comunidades académicas que fortalezcan la enseñanza del cálculo integral y su mejora continua.

Conclusiones

Fue interesante observar que, en los tres casos analizados, la primera reacción de los estudiantes fue señalar que no contaban con datos o información suficiente para resolver el problema. Esto pone de manifiesto que aún no están acostumbrados a identificar y aprovechar la información presente en su entorno.

Sin embargo, a partir de esta experiencia, los estudiantes comienzan a reconocer que ellos mismos pueden formular sus propios problemas utilizando datos reales o contextuales. Este cambio de perspectiva representa un avance importante en su proceso de aprendizaje.

En particular, el tercer estudiante fue quien mostró mayores dificultades para iniciar la tarea. A pesar de esto, con orientación y trabajo progresivo, logró avanzar y conectarse con la actividad.

A lo largo del ejercicio, los estudiantes lograron identificar y aplicar diferentes métodos para calcular el volumen, comprendiendo que todos ellos son válidos y conducen al mismo resultado. Como uno de ellos mencionó, “entre más formas tenga un estudiante para resolver un problema, más dominio tiene del concepto”.

Además, fue evidente que los estudiantes, aunque al principio enfrentaron ciertos obstáculos, consiguieron aplicar sus conocimientos de geometría analítica, estableciendo conexiones entre las representaciones gráficas y las funciones matemáticas necesarias para resolver el problema.

A través de esta tarea, los estudiantes desarrollan la capacidad de identificar y comprender las relaciones conceptuales entre las distintas materias que han cursado y que están cursando.

Los estudiantes expresaron asombro ante la rapidez con la que GeoGebra realiza los cálculos y genera las gráficas. Sin embargo, también señalaron que, si no hubieran realizado previamente los cálculos de manera manual, no habrían comprendido del todo lo que el software estaba haciendo. Esta observación resalta la importancia de entender el proceso antes de apoyarse en herramientas tecnológicas.

Además, al trabajar con la impresión 3D del sólido, los estudiantes descubren que es posible contar con un prototipo físico que les permite verificar que el volumen calculado es correcto. Aunque se les aclaró que el cálculo corresponde al volumen de un sólido (y, por tanto, no es hueco), se optó por imprimir el modelo de forma hueca con el fin de poder comprobar experimentalmente el resultado.

Finalmente, se destaca que este tipo de experiencias no solo fortalecen el dominio de contenidos matemáticos, sino que también preparan a los futuros ingenieros para enfrentar escenarios reales con mayor capacidad de análisis, creatividad y autonomía.

Referencias

- Chinyere, E. O., Akpan, E. T., Charles-Ogan, G., & James, G. D. (2023). Application of GeoGebra-Supported Model Based Learning and Students' Academic Performance in Solid Geometry in Uyo Metropolis of Akwa Ibom State, Nigeria. *International Journal of Science and Research (IJSR)*, 11(12). <https://doi.org/10.21275/SR221110054710>
- Del Río, L. (2020). Uso de GeoGebra en la enseñanza del cálculo integral: una propuesta para mejorar la comprensión de sólidos de revolución. *Revista Iberoamericana de Tecnología Educativa*, 15(2), 45–60.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Escolares.net. (2023). *Conceptos básicos de geometría*. <https://www.escolares.net/conceptos-basicos-geometri>
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Kluwer Academic Publishers.
- Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). *Teoría de las situaciones didácticas en la enseñanza de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Larson, R. (2006). *Cálculo integral* (8.^a ed.). McGraw-Hill.
- Larson, R. (2015). *Cálculo: trascendentes tempranas* (7.^a ed.). Cengage Learning.
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2016). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (10.^a ed.). Cengage Learning.
- Nueva Escuela Mexicana Digital (2023). *En el recurso educativo "Volumen de cilindros II"*. Secretaría de Educación Pública de México

Nueva Escuela Mexicana Digital (2024). *En el recurso educativo "Volumen del cono"*.
Secretaría de Educación Pública de México,

Ortega, J., Ramírez, P., y Soto, M. (2024). Modelado y visualización matemática con
GeoGebra e impresión 3D en educación superior. Editorial Académica
Universitaria.

Salazar Guerrero, L. J., Bahena Román, H., y Martínez Sánchez, R. (2020). *Geometría y
trigonometría* (2ª ed.). Grupo Editorial Patria.

Santos-Trigo, M. (2007). Matemática y tecnología: exploraciones con GeoGebra. *Revista
Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(3), 365–392.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Springer.